リスクの多い投資による資金消滅の可能性

The Possibility of Fund-Exhaustion by the Investment with Much Risk

上　野　皓　司
Ueno,　Koji

ABSTRACT

The investment with much risk has the possibility of much return, but also includes the possibility of fund-exhaustion. The purchase of the stock with much dividend, the lend of money at high interest, and the investment to venture company all include the possibility of much return and much risk. The probabilities of fund-exhaustion are examined when the investments are repeated several times.

投入した資金が全額消滅する可能性は，米国で売買されている多数のオプションにみられる。Johnson and Stulz（1987）は資金が消滅する可能性のあるオプションを瑕疵あるオプション（vulnerable option）と呼び，貴金属，コーヒー，砂糖，ココア，不動産への私的なオプションや各種の保険契約等を上げている。また消滅するかも知れないがその投入から一定期間に多額の収益を生む可能性がある投資は，米国で近年急速に成長したヘッジ・ファウンド（Hedge Funds）への参加である。ヘッジ・ファウンドは100人以下の投資家によって成立しているために，1940年に米国で成立した投資会社法（Investment Company Act）の規制を免れており，柔軟な投資戦略を採用している。ヘッジ・ファウンドの経営者は投資家から投資額の年1％の管理費と，年利潤の14％の奨励金を受け取るが，常に資金崩壊のリスクを負っている。Ackermann, McEnally and Ravenscraft（1999）やBrown, Goetzmann and Ibbotson（1999）によれば，ヘッジ・ファウンドの収益は資金の管理者（manager）の技術に依存し，ヘッジ・ファ

ウンドへの投資は資金の管理者への賭け（bets）である。ヘッジ・ファウンドは証券の正当な価格付けの失敗（mispricing of securities）を捜し出し，裁定取引（arbitrage）により利益をあげようとする。ジョージ・ソロスのクオンタム・ファウンドのように1兆円前後の資金を有し，20年以上年30％を越える利益を維持しているファウンドがいる一方で，いくつかのファウンドは設立されて3年も維持されないことがある。

未知の市場は多くのリスクを負うが多大の利益をも生むことがある。16世紀の西欧の冒険商業への投資はその一例であるが，最近では未発展の株式市場への投資がその例である。特に近年アジア諸国の株式市場が注目されている。これらの市場の研究もかなり行われ，Ghosh, Saidi and Johnson（1999）にはアジア市場と日米市場との関連の研究がみられ，香港，インド，韓国，マレーシアは米国と，シンガポール，インドネシア，フィリピンは日本との関係が深いと分析している。Jorion and Goetzmann（1999）は1921年から1996年までの世界の39の証券市場の年平均実質利益率を調査し，米国は年平均4.3％の最高利益率，世界の年平均の中位数は0.8％であると説明している。この調査によれば年平均が0％以下の国は，日本，ベルギー，ニュージーランド，ポルトガル，スペイン，インド，エジピト，ギリシャ等17ヵ国あり，市場の歴史が長い国ほど利益率が高いが，歴史が浅く，平均利益率が低い市場は，投資資金が消滅する可能性が高い。

1996年時点で，米国の株式取引の47％は家計，23％は年金基金，14％は投資信託によって行われている。Barber and Odean（2000）によれば，家計については度々売買をする家計の年間利益率は11.4％であるが，あまり取引をしない家計の年間利益率は18.5％であり，頻繁な売買はかえって利益率を低下させている，と分析している。頻繁に売買をくり返す個人投資家には元本を大きく削減させる例が推定され，かなりのリスクを負っていると考えられる。そのリスクの見返りとして配当が支払われるが，Porta, Lopez-De-Silanes, Shleifer and Vishny（2000）は33ヵ国の4000の企業を調査し，企業内のインサイダーと外部の株式所有者の間に存在する配当政策（dividend policies）の問題，すなわち

機関問題（agency problems）を検討し，外部の少数株主の圧力が企業内のインサイダーに配当をさせている，と述べている。企業への投資や企業の株式の購入が意外なリスクを生じる一つの要因に突然の競争企業や競合財の出現がある。Grossman and Levinsohn（1989）は輸入財価格による国内企業の収益への影響を分析しているが，国際競争の激化は企業への投資の大きな潜在的リスクである。

Campbell and Cochrane（1999）は，景気循環による消費水準の低下が株式のリスクへの嫌悪を増大させるために株価を低下させ，それがかえって株式の収益率を増大させる，と説明している。この説明には不況時にもできるだけ現在の消費を維持したいが株式に対する嫌悪は増大する，という人々の消費財に対する効用の習性を仮定しているが，逆に不況時にもリスクに賭けたい少数の人々の習性があり，これが株式市場を部分的に維持しており，投入資金の消耗にもかかわらず連続的な売買が維持される。Wermers（1999）は 1975 年から 1994 年の投資信託会社（mutual fund industry）の行動を調査し，投資信託会社は小型株に群がる傾向があり，買いに群がる株式は，その後 6 ヵ月間に，売る株式より 4％以上利益が多い，ことが知られると述べている。小型株は価格変化の可能性が高く，リスクが多いが，ある程度の収益とリスクの共存が，投資誘発の条件であるとも考えられる。

収益（return）を測定することは容易であるが，リスク（risk）の測定は一定の方法に従わねばならない。At-Sahalia and Lo（2000）は，市場のリスクを測定するために使用される変動率や相関を予測するために歴史上の収益データを使用し，独自の視点からリスクの値を測定している。Bekaert and Harvey（1995）は，世界市場の統合（World Market Integration）を検討し，「等しいリスクに等しい収益が対応していればその市場は世界市場に統合されている」と分析し，世界市場に統合されていない市場のリスクは，世界市場に統合されている市場のリスクと質が異なり，同じような基準で数量化することができないために，収益も異なると述べている。リスク測定の困難な問題は，世界市場では暗黙的に

同一基準で行われている，と想定されているが，検討を要する点である。

Rosen（1981）は芸術，娯楽，学術，スポーツ等で活躍する頂点のスーパースターの経済を分析し，その所得の片寄りを，「より広く大衆に売る者がより多く稼ぐ」と述べているが，高額の所得を目指してそれぞれの分野に挑戦する人々の何パーセントが頂点に達するかが問題で，一つの分野に挑戦し，少しの報酬を得て挫折し，また別の分野に挑戦する。人生ゲームは多くのリスクを賭けた連続的な消滅投資であるといえる。

以下では上記のように大小の報酬や利益を得ながら資金や労力を繰り返し投入する過程で，投入した資金や労力がどのような割合で消滅して行くかを検討する。

1.　投資資金の消滅可能性

リスクの多い投資の消滅可能性を分析するために，次のような仮定を設ける。投資対象は収益が大きいがリスクも大きいために，この投資対象に投入した資金はある期間の間に消滅する可能性が高い。この投資対象を「目標投資」と呼べば，目標投資が消滅した時点までに利子，配当，利益分配金，信用保証料，等の収益を生んでいるために[(1)]，その投資全体の収支が黒字か赤字かは状況によって異なるが，目標投資によって生み出された収益はすべて外部に蓄積され，その投入資金はある期間の後に消滅する可能性が高い。しかし目標投資が消滅したときには続いて外部に用意された資金が同じ商品に同額投資され，この第二の投資資金が消滅すれば，再度第三の資金が外部から投入される。このように連続する補足的投資が n 回計画されていると仮定する。

この投資計画では最初の投資と補足投資を合わせて合計 $n+1$ 回の資金投入が行われるが，k 回の投資資金が消滅した状態を S_k と表せば，S_k となる確率はど

（1）投資は，リスクの多い貸付，株式購入，投資信託への参加，貸付金の保証等，多額の収益を生む資金の投入先があるが，収益の多い投資はまた元本消滅の可能性も高い。ここではハイリスク・ハイリターンの投資を想定している。

のような値になるかを検討する。

資金が消滅する確率は目標投資については一定時間について λ を想定するが，補足投資の待機期間の消滅可能性は μ と考える。補足投資がもし銀行の預貯金のようにリスクがない状態で準備されていれば，目標投資に投じられた資金が順次消滅して投入されるまでの待機期間は，消滅の可能性は0である状態，すなわち $\mu=0$ であるが，待機期間に証券等のリスクのある分野に投資されていれば，$\mu(\leqq\lambda)$ の一定の消滅可能性が存在する。

このような状況のもとでは，S_k に対応する資金の消滅可能性の確率 π_k は

$$\pi_k=\lambda+(n-k)\mu \quad 0\leqq k\leqq n,$$

$$\pi_k=0 \qquad\qquad n+1\leqq k$$

と表されることができる。ここで各資金の消滅はポアソン過程によって表現されると考える。[(2)]

1－1. 投資資金消滅可能性の定式

時刻 t に投資資金の消滅状況が S_k である確率を $p_k(t)$ と表す。最初に時刻 t から一定時間 h 経過後にどの資金も消滅していない状況 S_0 の確率を求める。この状況は次の場合にだけ起こりうる。すなわち，「時刻 t にどの資金にも消滅がなく，時間 h の間に新たな消滅がなかった」。この確率は，

$$p_0(t)\exp(-\pi_0 h)=p_0(t)\{1-\pi_0 h+\delta(h)\}$$

と表される。[(3)]

（2）投資の消滅確率がこれまでの消滅数にかかわりなく $\pi(t)$ のポアソン過程であれば，一定時間 t の間に投資が消滅する可能性の確率は，消滅数0については，$P_0(t)=e^{-\pi t}$ から，1以上については

$P_k(t)=\{(\pi t)^k/k!\}e^{-\pi t}$

から計算される。

（3）テイラー級数により展開すれば

$e^{-\pi h}=1-\pi h+\pi^2h^2/2-\pi^3h^3/6+\cdots,$

であり，

$\exp(-\pi_0 h)=1-\pi_0 h+\delta(h)$

である。

時刻 $t+h$ にどの資金も消滅しない確率は，微小な値を $\delta(h)$ と表せば，

$$p_0(t+h)=(1-\pi_0 h)p_0(t)+\delta(h)$$

に等しい。この式はまた

$$\{p_0(t+h)-p_0(t)\}/h=-\pi_0 p_0(t)+\delta(h)$$

と表されることができ[4]，h を極限にまで小さくすれば，すなわち $h\to 0$ にとれば，

$$dp_0(t)/dt=-\lambda_0 p_0(t) \tag{1}$$

になる[5]。

それでは $1\leqq k\leqq n$ のときはどうであろうか。時刻 t に k の投資が消滅している状況は，次の二つの場合に起こる。①時刻 t に $k-1$ の投資が消滅しており，時間 h の間に新たな一つの投資が消滅する。②時刻 t に k の投資が消滅しており，時刻 $t+h$ に一つも投資が消滅しない。それぞれの確率は次ようになる。①の確率は[6]

$$p_{k-1}(t)\{1-\exp(-\pi_{k-1}h)\}=p_{k-1}(t)\{\pi_{k-1}h+\delta(h)\},$$

②の確率は，

$$p_k(t)\exp(-\pi_k h)=p_k(t)(1-\pi_k h+\delta(h))。$$

①と②の確率を合計すれば，

$$p_k(t+h)=p_k(t)(1-\pi_k h+\delta(h))+p_{k-1}(t)(\pi_{k-1}h+\delta(h))$$

となり，整理すれば，

$$\{p_k(t+h)-p_k(t)\}/h=-\pi_k p_k(t)+\pi_{k-1}p_{k-1}(t)+\delta(h)$$

であり，h を0に近づければ，$h\to 0$ の極限値として

$$dp_k(t)/dt=-\pi_k p_k(t)+\pi_{k-1}p_{k-1}(t) \tag{2}$$

が得られる。

（4）計算上は (2) の右辺第3項は $\{\delta(h)/h\}$ であるが，微小な値はすべて $\delta(h)$ で表している。

（5）$\delta(h)$ は，$h\to 0$ では0になる。

（6）投資が消滅しない確率は，$\exp(-\pi_{k-1}h)=1-\pi_{k-1}h+\delta(h)$ であるために，投資が消滅する確率は，$1-(1-\pi_{k-1}h+\delta(h))\fallingdotseq\pi_{k-1}h+\delta(h)$ である。

1−2. 投資資金消滅確率の一般式

（1）と（2）の両式から k 回の投入資金が消滅した確率を計算することができる。以下では $k=0, 1, 2$ の3例の確率を計算する。

$k=0$ のときは，（1）式より，

$$dp_0(t)/p_0(t) = -\pi_0 dt$$

$$d\log p_0(t) = -\pi_0 dt$$

であり，両辺を積分すれば，

$$\log p_0(t) = -\pi_0 t + c$$

$$p_0(t) = \exp(-\pi_0 t)\exp(c)$$

$$= A_0 \exp(-\pi_0 t)。$$

$t=0$ のとき S_0 の状態が確率1，すなわち $p_0(0)=1$ と考えれば，$p_0(0)=A_0=1$ であり，

$$p_0(t) = \exp(-\pi_0 t) \tag{3}$$

となる。

$k=1$ のときは，（2）式より，

$$dp_1(t)/dt = -\pi_1 p_1(t) + \pi_0 p_0(t)$$

$$dp_1(t)/dt = -\pi_1 p_1(t) + \pi_0 \exp(-\pi_0 t)。 \tag{4}$$

この式を解くために定数変化方法を適用すれば[7]，まず右辺の第2項 $\pi_0 \exp(-\pi_0 t)$ を0と置く。そして

$$dp_1(t)/dt = -\pi_1 p_1(t)$$

を解けば，

$$p_1(t) = A_1 \exp(-\pi_1 t) \tag{5}$$

である。ここでは A_1 は t の関数であり，この解がまた（4）の解であるために，

$$A_1 = \int \pi_0 \exp(-\pi_0 t)\exp(\pi_1 t)\,dt + c$$

$$= \{\pi_0/(\pi_1-\pi_0)\}\exp(\pi_1-\pi_0)t + c$$

であり，この A_1 の値を（5）に代入すれば，（4）の解は，

$$p_1(t) = \exp(-\pi_1 t)[\{\pi_0/(\pi_1-\pi_0)\}\exp(\pi_1-\pi_0)t + c]$$

$$=\{\pi_0/(\pi_1-\pi_0)\}\exp(-\pi_0 t)+c\exp(-\pi_1 t)$$

となる。ここで $t=0$ では S_1 の状態は0と考えれば，$p_1(0)=0$ であり，

$$c=-\pi_0/(\pi_1-\pi_0)$$

となる。したがって $p_1(t)$ は

$$p_1(t)=\{\pi_0/(\pi_1-\pi_0)\}\{\exp(-\pi_0 t)-\exp(-\pi_1 t)\} \tag{6}$$

である。

$p_2(t)$ についても同様に計算することができる。(2) より，

$$dp_2(t)/dt=-\pi_2 p_2(t)+\pi_1 p_1(t)$$

$$dp_2(t)/dt=-\pi_2 p_2(t)+\pi_1\{\pi_0/(\pi_1-\pi_0)\}\{\exp(-\pi_0 t)-\exp(-\pi_1 t)\}。\tag{7}$$

定数変化方法を適用すれば(7)，まず右辺の第2項を0と置き，

$$dp_2(t)/dt=-\pi_2 p_2(t)$$

を解けば，

$$p_2(t)=A_2\exp(-\pi_2 t) \tag{8}$$

である。ここでは A_2 は t の関数であり，この解がまた (7) の解であるために，

---

(7) 定数変化方法による解法を要約すれば以下のようになる。p を t の関数として，

$$dp/dt+a(t)p=b(t) \tag{1}$$

を解くとき，まず右辺の $b(t)$ を0と置き，

$$dp/dt+a(t)p=0 \tag{2}$$

を解く。この同次微分方程式の解は

$$p=A\exp(-\int a(t)dt) \tag{3}$$

である。同次ではない (1) を解くために (3) の一般解の A を t の関数と仮定し，(3) の解がまた (1) の解であると考える。(3) を微分すれば

$$dp/dt=(dA/dt)\exp(-\int a(t)dt)-Ba(t)\exp(-\int a(t)dt)$$

$$=(dA/dt)\exp(-\int a(t)dt)-a(t)p \tag{4}$$

である。(4) を (1) に代入し，

$$(dA/dt)\exp(-\int a(t)dt)=b(t)$$

より，

$$dA/dt=b(t)\exp(\int a(t)dt)$$

となる。(5) を積分すれば，

$$A=\int b(t)\exp(\int a(t)dt)dt+c \tag{6}$$

である。c は任意の値をとりうる積分定数である。この (6) を (3) に代入すれば，

$$p=\{\int b(t)\exp(\int a(t)dt)dt+c\}\exp(-\int a(t)dt)$$

となる。これが (1) の一般解である。

$$A_2=\int\{\pi_0\pi_1/(\pi_1-\pi_0)\}\{\exp(-\pi_0 t)-\exp(-\pi_1 t)\}\exp(\pi_2 t)dt+c$$
$$=\int\{\pi_0\pi_1/(\pi_1-\pi_0)\}\{\exp(\pi_2-\pi_0)t-\exp(\pi_2-\pi_1)t\}dt+c$$
$$=\{\pi_0\pi_1/(\pi_1-\pi_0)(\pi_2-\pi_0)\}\{\exp(\pi_2-\pi_0)t\}-\{\pi_0\pi_1/(\pi_1-\pi_0)(\pi_2-\pi_1)\}\{\exp(\pi_2-\pi_1)t\}+c$$

であり，この A_2 の値を（8）に代入すれば，$p_2(t)$ は

$$p_2(t)=\exp(-\pi_2 t)[\{\pi_0\pi_1/(\pi_1-\pi_0)(\pi_2-\pi_0)\}\{\exp(\pi_2-\pi_0)t\}-\{\pi_0\pi_1/(\pi_1-\pi_0)(\pi_2-\pi_1)\}\{\exp(\pi_2-\pi_1)t\}+c]$$
$$=\{\pi_0\pi_1/(\pi_1-\pi_0)(\pi_2-\pi_0)\}\{\exp(-\pi_0)t\}-\{\pi_0\pi_1/(\pi_1-\pi_0)(\pi_2-\pi_1)\}\{\exp(-\pi_1)t\}+c\{\exp(-\pi_2 t)\}$$

となる。$t=0$ では S_2 の状態は 0，すなわち $p_2(0)=0$ を考えれば，

$$c=\{-\pi_0\pi_1/(\pi_1-\pi_0)(\pi_2-\pi_0)\}+\{\pi_0\pi_1/(\pi_1-\pi_0)(\pi_2-\pi_1)\}$$

であり，この c の値を代入すれば，$p_2(t)$ は

$$p_2(t)=\{\pi_0\pi_1/(\pi_1-\pi_0)(\pi_2-\pi_0)\}\{\exp(-\pi_0 t)-\exp(-\pi_2 t)\}-\{\pi_0\pi_1/(\pi_1-\pi_0)(\pi_2-\pi_1)\}\{\exp(-\pi_1 t)-\exp(-\pi_2 t)\} \quad (9)$$

となる。

2. 目標投資による資金の消滅確率

以下ではより具体的に π の値を仮定して，資金の消滅確率 $p_k(t)$ を計算する一般式を考える。また待機期間のリスクが 0 のときや待機期間のリスクが目標投資と同じときの消滅確率を求める計算式を導く。

2−1. 目標投資による資金消滅確率の一般式

それでは上記のような消滅確率で目標投資や待機資金の投資を行う場合，目標投資が k 回消滅している確率はどのような値をとるであろうか。まず $k=1$ について考える。

$k=1$ では，（6）より，

$$p_1(t)=\{\pi_0/(\pi_1-\pi_0)\}\{\exp(-\pi_0 t)-\exp(-\pi_1 t)\} \quad (10)$$

に，

$$\pi_k=\lambda+(n-k)\mu \quad 0\leqq k\leqq n$$

を代入すれば，

$$p_1(t)=[(\lambda+n\mu)/\{\lambda+(n-1)\mu-\lambda-n\mu\}]\{e^{-(\lambda+n\mu)t}-e^{-(\lambda+n\mu-\mu)t}\}$$
$$=\{(\lambda+n\mu)/\mu\}\{e^{-(\lambda+n\mu-\mu)t}-e^{-(\lambda+n\mu-\mu+\mu)t}\}$$
$$=(\pi_0/\mu)\{\exp(-\pi_1 t)-\exp(-\pi_1 t-\mu t)\}$$
$$=(\pi_0/\mu)\exp(-\pi_1 t)\{1-\exp(-\mu t)\} \tag{11}$$

となる。k に 0, 2, 3, 4 などの他の値を代入すれば，以下のような一般式

$$p_0(t)=\exp(-\pi_0 t),\ k=0, \tag{12}$$
$$p_k(t)=\{(\pi_0\pi_1\cdots\pi_{k-1})/(k!\mu^k)\}\exp(-\pi_k t)\times\{1-\exp(-\mu t)\}^k,$$
$$1\leqq k\leqq n \tag{13}$$

が得られる。

もし 1 回だけしか補足投資が行われなければ，すなわち $n=1$ であれば，$p_2(t)$ はどのような値をとるであろうか。$p_2(t)$ は (9) より，

$$p_2(t)=\{\pi_0\pi_1/(\pi_1-\pi_0)(\pi_2-\pi_0)\}\{\exp(-\pi_0 t)-\exp(-\pi_2 t)\}$$
$$-\{\pi_0\pi_1/(\pi_1-\pi_0)(\pi_2-\pi_1)\}\{\exp(-\pi_1 t)-\exp(-\pi_2 t)\} \tag{9}$$

であるが，$n=1$ では $\pi_k=0(n+1\leqq k)$ より，$\pi_2=0$ になる。まずこの $\pi_2=0$, $\pi_1=\lambda+n\mu-\mu$, $\pi_0=\lambda+n\mu$ を (9) に代入すれば，

$$p_2(t)=\{(\lambda+n\mu)(\lambda+n\mu-\mu)/\mu\}[\{1/(\lambda+n\mu)\}(e^{-(\lambda+n\mu)t}-1)$$
$$-\{1/(\lambda+n\mu-\mu)\}(e^{-(\lambda+n\mu-\mu)t}-1)]$$

となるが，これらの式を t について微分すれば，

$$p_2{}'(t)=\{(\lambda+n\mu)(\lambda+n\mu-\mu)/\mu\}(e^{-(\lambda+n\mu)t})(e^{\mu t}-1)$$

であるが，ここで $n=1$ を代入すれば，

$$p_2{}'(t)=\{(\lambda+n\mu)(\lambda+n\mu-\mu)/\mu\}(e^{-\lambda t})(1-e^{-\mu t})$$

となる。したがって

$$p_2(t)=\{(\pi_0\pi_1)/\mu\}\int_0^t(e^{-\lambda\tau})(1-e^{-\mu\tau})d\tau$$

となる。n が 2, 3, 4 などの場合について計算すれば，$n+1\geqq 2$ の $p_{n+1}(t)$ は

$$p_{n+1}(t) = (\pi_0\pi_1\cdots\pi_{n-1}\lambda)/(n!\mu^n)\times\int_0^t(e^{-\lambda\tau})(1-e^{-\mu\tau})^n d\tau \tag{14}$$

と表される。

2−2. 待機期間のリスクが０のときの資金の消滅確率

補足投資の待機期間のリスクが 0，すなわち現金で保管していたり，リスクが一切存在しない預貯金等で資金を準備しているときは，投入資金の消滅確率はどのようになるであろうか。$\mu=0$ のときは，$0\leqq k\leqq n$ について，$\pi_k=\lambda$ となる。このとき $p_0(t)$ は，

$$p_0(t) = e^{-\lambda t}$$

で，$p_1(t)$ は

$$\begin{aligned} dp_1(t)/dt &= -\lambda p_1(t)+\lambda p_0(t) \\ &= -\lambda p_1(t)+\lambda e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

の解である。$t=0$ では S_1 の状態は 0，すなわち $p_1(0)=0$ を想定すれば，

$$p_1(t) = \lambda te^{-\lambda t}$$

となる。[8]

$p_2(t)$ についても同様に計算することができる。$p_2(t)$ は

$$\begin{aligned} dp_2(t)/dt &= -\lambda p_2(t)+\lambda p_1(t) \\ &= -\lambda p_2(t)+\lambda(\lambda te^{-\lambda t}) \end{aligned}$$

の解である。$t=0$ では S_2 の状態は 0，すなわち $p_2(0)=0$ を想定すれば，

$$p_2(t) = (1/2)\lambda^2t^2e^{-\lambda t}$$

となる。[9]

（8）定数変化法を適用し，右辺の第 2 項 $\lambda e^{-\lambda t}$ を除外して，$dp_1(t)/dt = -\lambda p_1(t)$ を解けば，$p_1(t) = A_1e^{-\lambda t}$ である。ここで $A_1 = \int\lambda e^{-\lambda t}e^{\lambda t}dt+c = \lambda t+c$ である。これより $p_1(t) = (\lambda t+c)e^{-\lambda t}$ となる。$t=0$ では S_1 の状態は 0，すなわち $p_1(0)=0$ を仮定すれば，$c=0$ であり，$p_1(t) = \lambda te^{-\lambda t}$ となる。

（9）定数変化法を適用し，右辺の第 2 項 $\lambda^2te^{-\lambda t}$ を除外して，$dp_2(t)/dt = -\lambda p_2(t)$ を解けば，$p_2(t) = A_2e^{-\lambda t}$ である。ここで $A_2 = \int\lambda^2te^{-\lambda t}e^{\lambda t}dt+c = (1/2)\lambda^2t^2+c$ である。これより $p_2(t) = \{(1/2)\lambda^2t^2+c\}e^{-\lambda t}$ となる。$t=0$ では S_2 の状態は 0，すなわち $p_2(0)=0$ を仮定すれば，$c=0$ であり，$p_2(t) = (1/2)\lambda^2t^2e^{-\lambda t}$ となる。

これらの値より，一般的には

$$p_k(t)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t},\ 0\leqq k\leqq n \tag{15}$$

$$p_{n+1}(t)=1-\sum_{k=0}^{n}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t},\ n+1\leqq k \tag{16}$$

が成立する。

2−3. 待機期間のリスクが目標投資と同じときの資金の消滅確率

補足投資の待機期間のリスクが目標投資と同じとき，すなわち $\mu=\lambda$ のときは投入資金の消滅確率はどのような値になるであろうか。$\mu=\lambda$ のときは，$0\leqq k\leqq n$ について，$\pi_k=\lambda+(n-k)\lambda=(n+1-k)\lambda$ である。このとき $\pi_0=(n+1)\lambda$ であり，$p_0(t)$ は，

$$p_0(t)=\exp(-\pi_0 t)=\exp\{-(n+1)\lambda t\}$$

である。また $\pi_1=n\lambda$ であり，$p_1(t)$ は

$$\begin{aligned}p_1(t)&=\{\pi_0／(\pi_1-\pi_0)\}\{\exp(-\pi_0 t)-\exp(-\pi_1 t)\}\\&=(n+1)(e^{-n\lambda t}-e^{-(n+1)\lambda t})\end{aligned}$$

である。また $\lambda_2=(n-1)\lambda$ であり，$p_2(t)$ は，

$$\begin{aligned}p_2(t)&=(\pi_0\pi_1)／\{(\pi_1-\pi_0)(\pi_2-\pi_0)\}\{\exp(-\pi_0 t)-\exp(-\pi_2 t)\}\\&\quad-(\pi_0\pi_1)／\{(\pi_1-\pi_0)(\pi_2-\pi_1)\}\{\exp(-\pi_1 t)-\exp(-\pi_2 t)\}\\&=n(n+1)／2\{e^{-(n-1)\lambda t}+e^{-(n+1)\lambda t}\}-n(n+1)e^{-n\lambda t}\end{aligned}$$

である。

これらの値より，$0\leqq k\leqq n$ については，一般式として

$$p_k(t)={}_{n+1}C_k\, e^{-(n+1-k)\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^k \tag{17}$$

と表すことができる。これらを確認するために，(17) に $k=0, 1, 2$ を代入すれば，

$$\begin{aligned}p_0(t)&={}_{n+1}C_0\, e^{-(n+1)\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^0\\&=\{(n+1)!／(n+1)!\}e^{-(n+1)\lambda t}\end{aligned}$$

$$= e^{-(n+1)\lambda t},$$

$$p_1(t) = {}_{n+1}C_1 e^{-n\lambda t}(1-e^{-\lambda t})$$

$$= \{(n+1)!/n!\} e^{-n\lambda t}(1-e^{-\lambda t})$$

$$= (n+1)(e^{-n\lambda t}-e^{-(n+1)\lambda t}),$$

$$p_2(t) = {}_{n+1}C_2 e^{-(n+1-2)\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^2$$

$$= [(n+1)!/\{(n-1)!\,2\,!\}] e^{-(n-1)\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^2$$

$$= \{n(n+1)/2\}\{e^{-(n-1)\lambda t}+e^{-(n+1)\lambda t}\} - n(n+1)e^{-n\lambda t}$$

であり，一般式（17）から導かれた値は，上記と同じであることがわかる。したがってこの一般式（17）は，$0 \leqq k \leqq n$ の他の k の値にも適用することできる。

3. 資金の平均存続期間

目標投資に投入される資金は，その投入期間と同時に待機期間にも消滅のリスクを負っている。したがって個々の資金は二つのリスクのもとでどれだけの期間消滅せずに機能するかが問題になるが，以下では $\mu = 0$ と $\mu = \lambda$，すなわち待機期間が無リスクの場合と，目標投資と同じリスクを負う場合の二つの状況のもとで，個々の資金が平均的にどれだけの期間存続する可能性があるかを考える。

3−1. 待機期間のリスクが 0 のときの資金の平均存続期間

まず $\mu = 0$ のときを考える。このときはすべての資金は同じ存続可能性を有し，t 時点の存続可能性は $p_0(t) = \exp(-\pi_0 t) = e^{-\lambda t}$ である。したがって k 番目に投入される資金が存続する確率を X_k と表せば，個々の資金が 0 から無限の時間までに存続する平均存続期間は，

$$EX_k = \int_0^\infty e^{-\lambda t}dt = |(-1/\lambda)e^{-\lambda t}|_0^\infty = 1/\lambda$$

である。

したがって $(n+1)$ 回の資金投入が行われれば，総資金の存続期間は。

$$(n+1)/\lambda$$

であり，投入回数が多くなるほど総資金の存続期間は長くなる。

3−2. 待機期間のリスクが目標投資と同じときの資金の平均存続期間

それでは$\mu=\lambda$，すなわち待機期間のリスクが目標投資と同じ場合，資金の存続期間はどのような長さになるでろうか。最初に投入された資金が消滅するまでの一つの資金の時点 t の存続確率は $p_0(t)=\exp(-\pi_0 t)=e^{-(n+1)\lambda t}$ で，$(n+1)$ 個の資金が用意されている。したがってこれらの資金の個々の存続期間を Y_0 と表せば，資金が 0 から無限の時間までに存続する平均存続期間 EY_0 は，

$$EY_0=\int_0^\infty e^{-(n+1)\lambda t}dt=|\{-1/(n+1)\lambda\}e^{-(n+1)\lambda t}|_0^\infty$$
$$=1/\{(n+1)\lambda\}$$

である。

最初の投入資金が消滅した後に，残った n 個の資金が次の消滅までに存続する確率は，時点 t に，$p_1(t)=\exp(-\pi_1 t)=e^{-n\lambda t}$ であるために，n 個の資金の次の消滅までの平均存続期間 EY_1 は，

$$EY_1=\int_0^\infty e^{-n\lambda t}dt=|\{-1/(n\lambda)\}e^{-n\lambda t}|_0^\infty$$
$$=1/(n\lambda)$$

である。[10]

同様に順次目標投資へ投入した資金が消滅した後の残った準備資金の存続期間を計算することができる。n 回の投資資金が消滅した後の残った資金の平均的な存続期間 EY_n は

$$EY_n=\int_0^\infty e^{-\lambda t}dt=|(-1/\lambda)e^{-\lambda t}|_0^\infty$$
$$=1/\lambda$$

であり，これらの平均存続期間の合計 $\sum_{k=0}^{n} EY_k$ は

$$\sum_{k=0}^{n} EY_k=(1/\lambda)[1+(1/2)+\cdots+(1/n)+\{1/(n+1)\}]$$

である。[11]

したがって $\mu=0$ のときの $n+1$ 回の資金投入による一つの資金の平均存続期

(10) ここで 0 から無限大までの期間は，最初の資金を投入した時点を 0 として計算している。

間 $(n+1)/\lambda$ に比べ，$\mu=\lambda$ のときの一つの資金の平均存続期間〔$1+(1/2)+\cdots+(1/n)+\{1/(n+1)\}$〕$/\lambda$ は，はるかに短くなる。

4. 資金の消滅確率と存続期間の計算例

上記の計算式にしたがって数値例により資金の消滅確率と平均存続期間を計算する。数値例として，$\lambda=0.1$，$n=4$ について考える。なお資金消滅確率は上記のように

$$\pi_k=\lambda+(n-k)\mu \quad 0\leqq k\leqq n,$$

$$\pi_k=0 \quad n+1\leqq k$$

であるために，π_k は

$$\pi_k=0.1+(4-k)\mu \quad 0\leqq k\leqq 4,$$

$$\pi_k=0 \quad 5\leqq k$$

である。

4－1. 資金の消滅確率

待機期間のリスクが目標投資より低いときの資金の消滅確率は

$$p_0(t)=\exp(-\pi_0 t),\ k=0, \tag{12}$$

$$p_k(t)=\{(\pi_0\pi_1\cdots\pi_{k-1})/(k!\mu^k)\}\exp(-\pi_k t)\times\{1-\exp(-\mu t)\}^k,$$
$$1\leqq k\leqq n \tag{13}$$

$$p_{n+1}(t)=(\pi_0\pi_1\cdots\pi_{n-1}\lambda)/(n!\mu^n)\times\int_0^t(e^{-\lambda\tau})(1-e^{-\mu\tau})^n d\tau \tag{14}$$

より計算される。ここでは $\mu=0.05(<\lambda=0.1)$ の場合を考えれば，それぞれの値は，

$$p_0(t)=e^{-0.3t},$$

---

(11) n が大きいときは，オイラーの定数 r が

$$r=\lim_{n\to\infty}\{1+(1/2)+\cdots+(1/n)-\log n\}$$

であるために，

$$\sum_{k=0}^{n} EY_k \fallingdotseq (1/\lambda)(r+\log n)$$

である。オイラーの定数 r は，$r\fallingdotseq 0.5772156$ である。

$$p_1(t) = \{(0.3)/(1!\,0.05)\}e^{-0.25t}\times\{1-e^{-0.05t}\},$$
$$= 6e^{-0.25t}\times\{1-e^{-0.05t}\},$$
$$p_2(t) = \{(0.3\times0.25)/(2!\,0.05^2)\}e^{-0.2t}\times\{1-e^{-0.05t}\}^2,$$
$$= 15e^{-0.2t}\times\{1-e^{-0.05t}\}^2,$$
$$p_3(t) = \{(0.3\times0.25\times0.2)/(3!\,0.05^3)\}e^{-0.15t}\times\{1-e^{-0.05t}\}^3,$$
$$= 20e^{-0.15t}\times\{1-e^{-0.05t}\}^3,$$
$$p_4(t) = \{(0.3\times0.25\times0.2\times0.15)/(4!\,0.05^4)\}e^{-0.1t}\times\{1-e^{-0.05t}\}^4,$$
$$= 15e^{-0.1t}\times\{1-e^{-0.05t}\}^4,$$
$$p_5(t) = (0.3\times0.25\times0.2\times0.15\times0.1)/(4!\,0.05^4)\times\int_0^t(e^{-0.1\tau})(1-e^{-0.05\tau})^4d\tau$$
$$= 1.5\times|-10e^{-0.1t}+(4/0.15)e^{-0.15t}-30^{-0.2t}+16e^{-0.25t}-(1/0.3)e^{-0.3t}|_0^t$$
$$= 1.5\{-10e^{-0.1t}+(4/0.15)e^{-0.15t}-30^{-0.2t}+16e^{-0.25t}$$
$$-(1/0.3)e^{-0.3t}+0.6666\}$$

である。(12)

$t=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ ついて $p_0(t)$ から $p_5(t)$ を計算すれば,

t	$p_0(t)$	$p_1(t)$	$p_2(t)$	$p_3(t)$	$p_4(t)$	$p_5(t)$
0	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.7408	0.2280	0.0295	0.0020	0.0001	0.0000
2	0.5488	0.3464	0.0915	0.0128	0.0001	0.0000
3	0.4066	0.3948	0.1597	0.0345	0.0042	0.0003
4	0.3012	0.4002	0.2215	0.0654	0.0109	0.0009

(12) 計算の過程は以下のようである。積分の内部を計算すれば,

$(e^{-0.1\tau})(1-2e^{-0.05\tau}+e^{-0.1\tau})^2d\tau$

$=(e^{-0.1\tau})(1-4e^{-0.05\tau}+6e^{-0.1\tau}-4e^{-0.15\tau}+e^{-0.2\tau})^2d\tau$

$=(e^{-0.1\tau}-4e^{-0.15\tau}+6e^{-0.2\tau}-4e^{-0.25\tau}+e^{-0.3\tau})d\tau$

であり,したがって

$\int_0^t(e^{-0.1\tau}-4e^{-0.15\tau}+6e^{-0.2\tau}-4e^{-0.25\tau}+e^{-0.3\tau})d\tau$

$=|-10e^{-0.1t}+(4/0.15)e^{-0.15t}-30^{-0.2t}+16e^{-0.25t}-(1/0.3)e^{-0.3t}|_0^t$

$=-10e^{-0.1t}+(4/0.15)e^{-0.15t}-30^{-0.2t}+16e^{-0.25t}-(1/0.3)e^{-0.3t}+0.6666$

である。

となる。

最初の投資資金が消滅せず維持される確率 $p_0(t)$ は，時間 t が経過するにしたがって急速に低下し，最初の投資資金が消滅する確率 $p_1(t)$ は時間 t が経過するにしたがって増大する。3 回目や 4 回目の投資資金が消滅する確率は，t が 3 や 4 の経過時点ではまだ低い水準にある。

4－2. 資金の存続期間

まず待機期間のリスクが 0，すなわち $\mu=0$ のときの資金の存続期間を考える。この場合にはすべての資金は同じ存続可能性を有し，$\pi_k=\lambda+(n-k)\mu=\lambda$ であるために，t 時点の存続可能性はすべての投資について同じ存続可能性 $p_0(t)=\exp(-\pi_0 t)=e^{-\lambda t}$ を有している。したがって k 番目に投入される資金が存続する確率を X_k と表せば，個々の資金が 0 から無限の時間までに存続する平均存続期間は，

$$EX_k=\int_0^\infty e^{-\lambda t}dt=\left|(-1/\lambda)e^{-\lambda t}\right|_0^\infty=1/\lambda,$$

すわち $\lambda=0.1$ の例では，$EX_k=10$ である。したがって $(n+1)$ 回の資金投入が行われれば，総資金の平均存続期間 $\sum EX_k$ は，

$$(n+1)/\lambda$$

であり，$n=4$ では，総資金の平均存続期間 $\sum EX_k=50$ である。

それでは待機期間のリスクが目標投資と同じとき，すなわち $\mu=\lambda$ のときには資金の存続期間はどのような長さになるでろうか。最初に投入された資金が消滅するまでの時点 t の存続確率は $p_0(t)=\exp(-\pi_0 t)=e^{-(n+1)\lambda t}$ であるが，継続する投資をすべてをあわせれば，合計で $(n+1)$ 個の資金が用意されている。最初に投入された資金の存続期間を Y_0 と表せば，資金が 0 から無限の時間までに存続する平均的な存続期間 EY_0 は，

$$EY_0=\int_0^\infty e^{-(n+1)\lambda t}dt=\left|\{-1/(n+1)\lambda\}e^{-(n+1)\lambda t}\right|_0^\infty$$

$$=1/\{(n+1)\lambda\}$$

であり，この例では $EY_0=1/\{(4+1)0.1\}=2$ である。

最初の投入資金が消滅した後に，次に投入された資金が存続する確率は，時点 t に，$p_1(t) = \exp(-\pi_1 t) = e^{-n\lambda t}$ であるために，その平均存続期間 EY_1 は，

$$EY_1 = \int_0^\infty e^{-n\lambda t}dt = |\{-1/(n\lambda)\}e^{-n\lambda t}|_0^\infty$$
$$= 1/(n\lambda)$$

であり，$EY_1 = 1/(4\times 0.1) = 2.5$ である。

同様に順次目標投資へ投入した資金が消滅した後の残った準備資金の存続期間を計算することができる。n 回の投資資金が消滅した後の残った資金の平均的な存続期間 EY_n は

$$EY_n = \int_0^\infty e^{-\lambda t}dt = |(-1/\lambda)e^{-\lambda t}|_0^\infty$$
$$= 1/\lambda$$

であり，$EY_n = 1/0.1 = 10$ である。

したがってこれらの平均存続期間の合計 ΣEY_k は

$$\sum_{k=0}^{4} EY_k = (1/0.1)\{1+(1/2)+(1/3)+(1/4)+(1/5)\}$$
$$= 22.83$$

である。$\mu = 0$ のときの総資金の平均存続期間 $\Sigma EX_k = 50$ に比べ，$\mu = \lambda$ のときの総資金の平均存続期間 $\Sigma EY_k = 22.83$ はかなり短くなる。

参考文献

Ackermann, Carl, Rchard McEnally and David Ravenscraft, “The performance of Hedge Funds: Risk, Return, and Incentives”, Journal of Finance, 54 (1999), 833-74.

At-Sahalia, Yacine and Andrew W. Lo, “Nonparametric Risk Management and Implied Risk Aversion”, Journal of Econometrics, 94 (2000), 9-51.

Barber, Brad M. and Terrance Odean, “Trading is Hazardous to Your Wealth: The Common Stock Investment Performance of Individual Investors”, Journal of Finance, 55 (2000), 773-806.

Bekaert, Geert and Campbell R. Harvey, “Time-Varying World Market Integration”, Journal of Finance, 50 (1995), 403-44.

Brown, Stephen J., William N. Goetzmann and Roger G. Ibbotson, “Offshore Hedge Funds: Survival and Performance, 1989-95”, Journal of Business, 72 (1999), 91-117.

Campbell, John Y. and John H. Cochrane, “By Force of Habit: A Consumption-Based

Explanation of Aggregate Stock Market Behavior", Journal of Political Economy, 107 (1999), 205-51.

Ghosh, Asim, Reza Saidi and keith H. Johnson, "Who Moves the Asia-Pacific Stock Markets −US or Japan? Empirical Evidence Based on the Theory of Cointegration", Financial Review, 34 (1999), 159-69.

Grossman, Gene M. and James A. Levinsohn, "Import Competition and the Stock Market Return to Capital", American Economic Review, 79 (1989), 1065-87.

Johnson, Herb and Ren Stulz, "The Pricing of Options with Default Risk", Journal of Finance, 42 (1987), 267-80.

Jorion, Philippe and William N. Goetzmann, "Global Stock Markets in the Twentieth Century", Journal of Finance, 54 (1999), 953-80.

Porta, Rafael, Florencio Lopez-De-Silanes, Andrei Shleifer and Robert W. Vishny, "Agency Problems and Dividend Policies around the World", Journal of Finance, 55 (2000), 1-33.

Rosen, Sherwin, "The Economics of Superstars", American Economic Review, 71 (1981), 845-58.

Wermers, Russ, "Mutual Fund Herding and the Impact on Stock Prices", Journal of Finance, 54 (1999), 581-622.